§11 Irreduzible Darstellungen und reine Zustände

In diesem Abschnitt wollen wir spezielle Darst. von C^*-Algebren betrachten, die man in guten Fällen als "Bausteine" der allg. Darst.-Theorie betrachten kann:

11.1 Bemerkung + Definition Sei $\pi: A \to L(H)$ eine $*$-Darst. der $*$-Algebra A. Ist $\{0\} \neq E \subseteq H$ ein abg. lin. Teilraum von H mit $\pi(A)E \subseteq E$, so ist $\pi_{|E}: A \to L(E)$; $\pi_{|E}(a) := \pi(a)_{|E}: E \to E$ ein $*$-Darst. von A auf E. Wir sagen dann, dass $\pi_{|E}$ eine Teildarstellung π ist.
Eine Darst. $\pi: A \to L(H)$ heißt (topologisch) irreduzibel, falls $\pi(A)H \neq \{0\}$, und π besitzt keine echte Teildarstellung $\pi_{|E}$, d.h. ist $E \subseteq H$ abg. lin. Teilraum mit $\pi(A)E \subseteq E$, so folgt $E = \{0\}$ oder $E = H$.

Beachte Ist $E \subseteq H$ mit $\pi(A)E \subseteq E$, so gilt auch $\pi(A)E^\perp \subseteq E^\perp$, denn sind $\xi \in E$, $\eta \in E^\perp$, so gilt $\langle \pi(a)\eta, \xi \rangle = \langle \eta, \underbrace{\pi(a^*)\xi}_{\in E} \rangle = 0$.
Damit erhalten wir eine Zerlegung

$$\pi = \pi_{|E} \oplus \pi_{|E^\perp},$$

denn für $\xi \in E$, $\eta \in E^\perp$ gilt

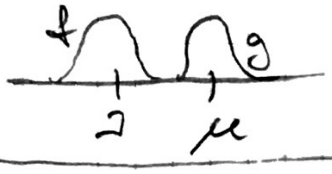
$$\pi(a)(\xi + \eta) = \pi_{|E}(a)\xi + \pi_{|E^\perp}(a)\eta.$$

Fazit: Ist π nicht irreduzibel mit $\pi(A)H \neq \{0\}$, so können wir π in eine direkte Summe von Teildarstellungen zerlegen.

11.2 Satz (Lemma von Schur)
Sei $\pi: A \to L(H)$ eine $*$-Darst. der $*$-Algebra A mit $H \neq \{0\}$. Dann sind äquivalent:
(1) π ist irreduzibel.
(2) Für alle $0 \neq \xi \in H$ gilt $\overline{\pi(A)\xi} = H$, d.h. ξ ist ein zyklischer Vektor für π.
(3) Ist $T \in L(H)$ mit $T\pi(a) = \pi(a)T \;\forall a \in A$, so gilt $T = \lambda 1$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ (mit $1 := id_H$).

Bew: (1) $\Rightarrow$ (2) Sei $0 \neq \xi \in H$. Dann gilt für $E_\xi := \overline{\pi(A)\xi}$, dass $\pi(A)E_\xi \subseteq E_\xi$. Ferner gilt $E_\xi \neq \{0\}$, denn sonst wäre $E_\xi \subseteq \mathbb{C}\xi$, und damit wäre $\xi^\perp = \{\eta \in H ; \eta \perp \xi\} =: F$ ein abg. lin. Teilraum von H mit $\pi(A)F \subseteq F$, $F \neq H$, also $F = \{0\}$ da π irreduzibel. Dann folgt $H = \mathbb{C}\xi$ und $0 \neq \pi(A)H = \pi(A)\xi = E_\xi$. Widerspruch!
Damit ist $0 \neq E_\xi$ abg. $\pi(A)$-inv. Teilraum von H, also $E_\xi = \overline{\pi(A)\xi} = H$, da π irreduzibel.
(2) $\Rightarrow$ (1) Ist $\{0\} \neq E \subseteq H$ ein abg. $\pi(A)$-invarianter Teilraum, so folgt für $0 \neq \xi \in E$: $H = \overline{\pi(A)\xi} \subseteq E$, also $H = E$ und π ist irreduzibel.
(1) $\Rightarrow$ (3) Sei $T \in L(H)$ mit $T\pi(a) = \pi(a)T \;\forall a \in A$. Dann gilt auch $\pi(a)T^* = (T\pi(a^*))^* = (\pi(a^*)T)^* = T^*\pi(a)$ für alle $a \in A$. Durch Übergang auf $Re(T) = \frac{1}{2}(T+T^*)$ und $Im(T) = \frac{1}{2i}(T-T^*)$ können wir dann o.B.d.A annehmen, dass $T = T^*$ gilt.
Wir zeigen dann, dass $\sigma(T) = \{\lambda\}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Dann folgt $id_{\sigma(T)} = \lambda \underline{1}$, also $T = id_{\sigma(T)}(T) = \lambda 1$.
Beachte: Da $\pi(a)T = T\pi(a) \;\forall a \in A$ gilt auch $\pi(a)f(T) = f(T)\pi(a)$ für alle $a \in A$, $f \in C(\sigma(T))$ (siehe die folgende Bemerkung 11.3).

Ann: $\exists\, \lambda, \mu \in \sigma(T)$ mit $\lambda \neq \mu$. Dann ex. Fkt. $f, g \in C(\sigma(T))$ mit $f(\lambda) = 1 = g(\mu)$ und $f \cdot g = 0$

Skizze 

Dann folgt $f(T) \neq 0 \neq g(T)$ und $f(T)\cdot g(T) = (f\cdot g)(T) = 0$. Setze $E := \overline{f(T)H} \neq \{0\}$.

Dann gilt: $\pi(A)E \subseteq \overline{\pi(A)f(T)H} = \overline{f(T)\pi(A)H} \subseteq E$, also ist $E = H$, da π irreduzibel. Dann folgt aber $\{0\} \neq g(T)H = g(T)\overline{f(T)H} \subseteq \overline{g(T)f(T)H} = \overline{0 \cdot H} = \{0\}$, und wir erhalten einen Widerspruch!

(3) $\Rightarrow$ (1) Sei $\{0\} \neq E \subseteq H$ ein abg. $\pi(A)$-inv. lin. Teilraum und sei $P: H \to E \subseteq H$ die orthog. Projektion auf E. Dann folgt $\forall a \in A$, $\xi \in E$ und $\eta \in E^\perp$:

$$P(\pi(a)(\xi+\eta)) = P(\overbrace{\pi(a)\xi}^{\in E}) + P(\overbrace{\pi(a)\eta}^{\in E^\perp}) = \pi(a)\xi$$
$$= \pi(a)P(\xi+\eta), \text{ also } \pi(a)P = P\pi(a) \quad \forall a \in A.$$

Nach (3) folgt $P = \lambda 1$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Da $P^2 = P = P^*$ folgt $\lambda^2 = \lambda = \bar{\lambda}$, also $\lambda \in \{0,1\}$ und da $P \neq 0$ (da $E \neq \{0\}$) folgt $\lambda = 1$, also $P = 1$ und $E = 1H = H$. ∎

11.3 Bemerkung: Im Beweis von 11.2 haben wir die folgende wichtige Tatsache verwendet: Ist A eine C^*-Algebra und ist $a \in A$ normal, und ist $b \in A$ mit $ba = ab$ und $ba^* = a^*b$, so gilt auch $bf(a) = f(a)b \quad \forall f \in C(\sigma(a))$.

Dazu: $f(a) \in C^*(a,1) = \overline{\left\{\sum_{k,l=0}^{N} \alpha_{k,l}\, a^k (a^*)^l \;\middle|\; N \in \mathbb{N}, \alpha_{k,l} \in \mathbb{C}\right\}}$ und aus d. Voraussetzung folgt sofort, dass b mit jedem Polynom in a, a^* vertauscht. Da Mult. in A stetig ist, vertauscht b dann auch mit jedem Element in $C^*(a,1)$.

Wir wollen im folgenden irreduzible Darst. über die zugeh. Zustände charakterisieren: Dazu benötigen wir:

__11.4 Lemma__ Sei A ein C^*-Algebra, $\pi: A \to L(H)$ eine nichtentartete $*$-Darst. und $\xi \in H$ mit $\|\xi\| = 1$. Ist dann $\varphi \in S(A)$ def. durch

$$\varphi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle \quad (\text{also } \varphi = \varphi_{\pi,\xi})$$

so gelten:

(1) Ist $T = T^* \in L(H)$ mit $0 \le T \le 1$ und $T\pi(a) = \pi(a)T$ für alle $a \in A$, so gilt $0 \le \psi_T \le \varphi$ für

$$\psi_T(a) := \langle \pi(a)T\xi, T\xi\rangle$$

(2) Ist ξ zyklischer Vektor für π, so ist $T \mapsto \psi_T$, mit T wie in (1), injektiv.

(3) $\forall\, 0 \le \psi \le \varphi$ gilt $\psi = \psi_T$ für ein $0 \le T \le 1$ wie in (1).

__Bew:__ (1) Sei $T \in L(H)$ mit $\|T\| \le 1$ und $\pi(a)T \overset{(*)}{=} T\pi(a)$ für alle $a \in A$. Dann gilt:

$$\psi_T(a^*a) = \langle \pi(a^*a)T\xi, T\xi\rangle = \langle \pi(a)T\xi, \pi(a)T\xi\rangle$$
$$= \|\pi(a)T\xi\|^2 \overset{(*)}{=} \|T\pi(a)\xi\|^2 \le \|T\|^2 \|\pi(a)\xi\|^2$$
$$\le \|\pi(a)\xi\|^2 = \varphi(a^*a).$$

Damit folgt $0 \le \psi_T \le \varphi$.

(2) Seien $0 \le T, T' \le 1$ mit $\psi_T = \psi_{T'}$. __Zeige:__ $T^2 = (T')^2$ [Dann folgt auch $T = \sqrt{T^2} = \sqrt{T'^2} = T'$].

__Dazu:__ $\forall a \in A$ gilt:

$$\langle \pi(a)\xi, T^2\xi\rangle \overset{T=T^*}{=} \langle T\pi(a)\xi, T\xi\rangle \overset{(*)}{=} \langle \pi(a)T\xi, T\xi\rangle$$
$$= \psi_T(a) = \psi_{T'}(a) \overset{\text{s.o.}}{=} \langle \pi(a)\xi, T'^2\xi\rangle$$

Da $\overline{\pi(A)\xi} = H$ folgt $T^2\xi = T'^2\xi$, und dann auch

$$T^2(\pi(a)\xi) = \pi(a)T^2\xi = \pi(a)T'^2\xi = T'^2(\pi(a)\xi)$$

für alle $a \in A$. Da $\overline{\pi(A)\xi} = H$ folgt $T^2 = T'^2$.

(3) Sei $0 \leq \psi \leq \varphi$ und sei o.B.d.A $\overline{\pi(A)\xi} = H$ (sonst Übergang auf $\tilde{H} := \overline{\pi(A)\xi}$ und $\tilde{\pi} = \pi|_{\tilde{H}}$).
Setze $H_0 := \pi(A)\xi \subseteq H$. Dann ist
$\langle\, , \rangle_\psi : H_0 \times H_0 \to \mathbb{C}$; $\langle \pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle_\psi := \psi(b^*a)$
ein positiv semi-definite Hermitesche Form auf H_0 mit

$$|\langle \pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle_\psi|^2 = |\psi(b^*a)| \overset{CS}{\leq} \psi(b^*b)\psi(a^*a)$$
$$\overset{\psi\leq\varphi}{\leq} \varphi(b^*b)\varphi(a^*a) = \|\pi(b)\xi\|^2 \|\pi(a)\xi\|^2.$$

Damit ist $\langle\, , \rangle_\psi$ stetig und besitzt eine stetige Fortsetzung auf H mit $|\langle \xi_1, \xi_2\rangle_\psi| \leq \|\xi_1\|\|\xi_2\|$ $\forall \xi_1, \xi_2 \in H$.
Mit FA, Satz 13.5 ex. dann ein $\tilde{T} \in L(H)$ mit $0 \leq \tilde{T} \leq 1$ und

$$\langle \xi_1, \xi_2\rangle_\psi = \langle \tilde{T}\xi_1, \xi_2\rangle \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in H.$$

Insb. folgt für alle $a, b \in A$:

$$\psi(b^*a) = \langle \pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle_\psi = \langle \tilde{T}\pi(a)\xi, \pi(b)\xi\rangle.$$

Für beliebige $a, b, z \in A$ folgt dann:

$$\langle \pi(a)\xi, \tilde{T}\pi(z)\pi(b)\xi\rangle \overset{\tilde{T}=\tilde{T}^*}{=} \langle \tilde{T}\pi(a)\xi, \pi(zb)\xi\rangle$$
$$= \psi((zb)^*a) = \psi(b^*(z^*a)) = \langle \tilde{T}\pi(z^*a)\xi, \pi(b)\xi\rangle$$
$$\overset{\tilde{T}=\tilde{T}^*}{=} \langle \pi(z^*a)\xi, \tilde{T}\pi(b)\xi\rangle = \langle \pi(a)\xi, \pi(z)\tilde{T}\pi(b)\xi\rangle$$

Da $\overline{\pi(A)\xi} = H$ folgt damit $\pi(z)\tilde{T} = \tilde{T}\pi(z)$ $\forall z \in A$.
Für $T = (\tilde{T})^{\frac{1}{2}}$ gilt dann ebenso, dass $\pi(z)T = T\pi(z)$ $\forall z \in A$ (Bem. 11.3). Dann folgt:

$$\psi(b^*a) = \langle \pi(a)\xi, \tilde{T}\pi(b)\xi\rangle = \langle \pi(a)\xi, T^2\pi(b)\xi\rangle$$
$$= \langle T\pi(a)\xi, T\pi(b)\xi\rangle \overset{(**)}{=} \langle \pi(a)T\xi, \pi(b)T\xi\rangle$$
$$= \psi_T(b^*a).$$

Da $A = A^2 = A^*A$ folgt $\psi = \psi_T$. ∎

11.5 Definition Sei A ein C^*-Algebra. Ein Zustand $\varphi \in S(A)$ heißt <u>rein</u> (in Englisch

pure), wenn für alle positiven Flt. $\psi \in P(A)$ mit $0 \le \psi \le \varphi$ gilt: $\exists \lambda \in [0,1]$ mit $\psi = \lambda\varphi$.
Hier: Wir schreiben $\psi \le \varphi$ falls $\varphi - \psi \ge 0$ in dem Sinn, dass $\varphi - \psi$ positives Flt. ist.

11.6 Satz Sei A eine C^*-Algebra, $\varphi \in S(A)$ und $\pi: A \to L(H)$ mit zyklischem Vektor $\xi \in H$, so dass $\varphi(a) = \varphi_{\pi,\xi}(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle \ \forall a \in A$.
Dann gelten:
(1) φ ist ein reiner Zustand g.d.w. π irreduzibel
(2) Ist π irreduzibel und sind $0 \ne \xi, \zeta \in H$ mit $\langle \pi(a)\xi, \xi\rangle = \langle \pi(a)\zeta, \zeta\rangle \ \forall a \in A$, so ex. ein $\lambda \in \mathbb{T}$ mit $\xi = \lambda\zeta$.
(3) Sind $\pi: A \to L(H_\pi)$, $\rho: A \to L(H_\rho)$ irreduzibel, $\xi \in H_\pi$, $\zeta \in H_\rho$ mit $\langle \pi(a)\xi, \xi\rangle = \langle \rho(a)\zeta, \zeta\rangle \ \forall a \in A$, so folgt $\pi \simeq \rho$. Genauer: Es ex. $V: H_\pi \to H_\rho$ unitär mit $V\pi(a) = \rho(a)V \ \forall a \in A$ und $V\xi = \zeta$.

Beweis (3) Da π, ρ irreduzibel gilt π, ρ nicht entartet, also folgt mit 10.4, dass
$\|\xi\|^2 = \|\varphi_{\pi,\xi}\| = \|\varphi_{\rho,\zeta}\| = \|\zeta\|^2$.
Wir können also o.B.d.A $\|\xi\| = \|\zeta\| = 1$ annehmen.
Dann ist $\varphi_{\pi,\xi} = \varphi_{\rho,\zeta}$ ein Zustand, und (3) folgt aus Satz 10.5.
(1) "$\Rightarrow$" Sei $\{0\} \ne E \subseteq H$ ein $\pi(A)$-inv. abg. Teilraum und sei $P: H \to E \subseteq H$ die orthogonale Projektion. Dann gilt $P\pi(a) = \pi(a)P \ \forall a \in A$ und $0 \le P \le 1$.
Sei $\psi_P(a) := \langle \pi(a)P\xi, P\xi\rangle$. Mit 11.4 (1) gilt $0 \le \psi_P \le \varphi$, und da φ rein, ex. ein $\lambda \in [0,1]$ mit $\psi_P = \lambda\varphi$. Dann folgt für $T = \sqrt{\lambda}1$ auch

$0 \le T \le 1$ und $\pi(a)T = T\pi(a)$, und
$\varphi_T(a) = \langle \pi(a)\sqrt{\lambda}\xi, \sqrt{\lambda}\xi \rangle = \lambda \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \lambda\varphi(a)$
$= \varphi_P(a)$.
Nach 11.4 (2) folgt $P = T = \sqrt{\lambda}1$, also $P = 1$ und
$E = 1 \cdot H = H$. Also ist π irreduzibel.
„$\Leftarrow$" Sei $0 \le \psi \le \varphi$. Nach 11.4 (3) ex. dann ein
$0 \le T \le 1$ mit $T\pi(a) = \pi(a)T$ $\forall a \in A$ und $\psi = \varphi_T$.
Da π irreduzibel ex. ein $\tilde{\lambda} \in [0,1]$ mit $T = \tilde{\lambda}1$.
Dann folgt für alle $a \in A$:
$\psi(a) = \varphi_T(a) = \langle \pi(a)\tilde{\lambda}\xi, \tilde{\lambda}\xi \rangle = \tilde{\lambda}^2 \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \tilde{\lambda}^2\varphi(a)$,
also $\psi = \lambda\varphi$ mit $\lambda = \tilde{\lambda}^2 \in [0,1]$.
(2) Nach (3) ex. ein $U: H \to H$ unitär mit $U\xi = \zeta$
und $\pi(a)U = U\pi(a)$ $\forall a \in A$. Nach Schur
gilt $U = \lambda 1$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$, und da $U^* = U^{-1}$ folgt
$\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$, also $\lambda \in \mathbb{T}$. Insb. folgt $\zeta = U\xi = \lambda\xi$. ∎

Problem: Besitzt jede C^*-Algebra (genug) irreduzible Darstellungen?
Mit Satz 11.6 übersetzt sich die Frage in: Besitzt jede C^*-Algebra (genügend viele) reine Zustände?
(Genug?: $\exists$ $\forall a \in A$ eine irred Darst. π (bzw. ein reiner Zustand φ) mit $\pi(a) \ne 0$ (bzw. $\varphi(a^*a) \ne 0$).
Um diese Frage zu beantworten, benötigen wir eine andere Beschreibung für reine Zustände.

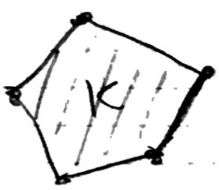
11.7 Definition Sei K eine Teilmenge eines $\mathbb{K}$-VR E ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ od. $\mathbb{C}$). Dann heißt eine Teilmenge

$S \subseteq K$ <u>extremal</u>, wenn für alle $x, y \in K$ und $0<\lambda<1$ mit $\lambda x+(1-\lambda)y \in S$ bereits folgt, dass $x, y \in S$.

$x \in K$ heißt <u>Extremalpunkt</u> von K, wenn $\{x\}$ extremal ist. Wir schreiben

$$\mathrm{Ext}(K) := \{\text{Extremalpunkte von } K\}.$$

<u>Skizze:</u>



Die extremalen Teilm. sind K, Seiten von K, Ecken von K

Die extremalen Teilm. sind die Randpkt von K.

<u>11.8</u> Lemma Sei A eine C^*-Algebra und sei $\varphi \in S(A)$. Dann sind äquivalent:

(1) φ ist rein

(2) φ ist Extremalpunkt von $S(A)$.

<u>Bew:</u> (2)$\Rightarrow$(1) Sei $\varphi \in S(A)$ extremal in $S(A)$, und sei $\psi \in P(A)$ mit $0 \leq \psi \leq \varphi$. Dann folgt

$$\varphi = \psi + (\varphi - \psi) \quad \text{und} \quad \varphi - \psi \geq 0.$$

Mit 9.7 folgt $1 = \|\varphi\| = \|\psi\| + \|\varphi - \psi\|$. Ist $\psi \neq 0$ und $\psi \neq \varphi$, so setze $\lambda = \|\psi\| \in (0,1)$, $\psi_1 = \frac{1}{\lambda}\psi$, $\psi_2 = \frac{1}{1-\lambda}(\varphi - \psi)$. Dann gilt $\psi_1, \psi_2 \in S(A)$ mit

$$\varphi = \lambda \psi_1 + (1-\lambda)\psi_2,$$

also $\varphi = \psi_1 = \psi_2$ da $\{\varphi\}$ extremal in $S(A)$. Aber dann folgt $\psi = \lambda\psi_1 = \lambda\varphi$, also (1).

(1)$\Rightarrow$(2): Sei nun φ rein und seien $\psi_1, \psi_2 \in S(A)$ und $0<\lambda<1$ mit $\varphi = \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2$. Dann folgt $0 \leq \lambda\psi_1, (1-\lambda)\psi_2 \leq \varphi$, also ex. $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ mit $\lambda\psi_1 = \lambda_1\varphi$ und $(1-\lambda)\psi_2 = \lambda_2\varphi$. Wegen $\lambda = \|\lambda\psi_1\| = \|\lambda_1\varphi\| = \lambda_1$ und $1-\lambda = \|(1-\lambda)\psi_2\| = \|\lambda_2\varphi\| = \lambda_2$ folgt $\psi_1 = \varphi = \psi_2$.

11.9 Bez + Bem: Sei A eine C^*-Algebra, und sei $RS(A) = \{\varphi \in \mathcal{S}(A) \mid \varphi \text{ rein}\}$ die Menge der reinen Zustände von A. Nach Lemma 11.8 gilt

$$RS(A) = Ext(S(A)).$$

Ferner gilt: Ist $K = \{\varphi \in P(A) \mid \|\varphi\| \le 1\}$, so gilt

$$Ext(K) = RS(A) \cup \{0\},$$

denn ist $0 = \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2$ mit $0<\lambda<1$, so folgt $\psi_1 = \psi_2 = 0$, also ist $0 \in Ext(K)$. Ist $0 \neq \varphi \in Ext(K)$, so folgt $\|\varphi\| = 1$, denn sonst wäre $0 < \lambda := \|\varphi\| < 1$ mit $\varphi = \lambda(\frac{1}{\|\varphi\|}\varphi) + (1-\lambda)0$ echte Konvexkombin. in K. Ferner gilt offensichtlich

$$Ext(K) \cap \mathcal{S}(A) \subseteq Ext(\mathcal{S}(A)) = RS(A),$$

also folgt $Ext(K) \subseteq RS(A) \cup \{0\}$.
Ist umgekehrt $\varphi \in RS(A)$ und sind $\psi_1, \psi_2 \in K$ und $0<\lambda<1$ mit $\varphi = \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2$, so folgt $1 = \|\varphi\| = \|\psi_1\| = \|\psi_2\|$, also $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}(A)$, und dann $\varphi = \psi_1 = \psi_2$, da $\varphi \in Ext(\mathcal{S}(A))$.

Die Existenz von reinen Zuständen folgt nun aus

11.10 Satz (Krein-Milman) Sei (E, τ) ein lokalkonvexer $\mathbb{K}$-VR und sei $\emptyset \neq K \subseteq E$ kompakt. Dann ist $Ext(K) \neq \emptyset$ und $K \subseteq \overline{conv(Ext(K))}$.
Ist K zusätzlich konvex, so gilt

$$K = \overline{conv(Ext(K))}.$$

(Hierbei bezeichnet $conv(Ext(K))$ die konvexe Hülle von $Ext(K)$.)

Für den Beweis benötigen wir

11.11 Lemma Sei $\emptyset \neq K \subseteq E$ wie im Satz und sei $\mathcal{E}$ die Menge aller kompakten extremalen Teilmengen $\emptyset \neq S \subseteq K$. Dann gilt $K \in \mathcal{E}$ und:

(a) Ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ mit $S_0 := \bigcap_{S \in \mathcal{F}} S \neq \emptyset$, so gilt $S_0 \in \mathcal{E}$.

(b) Sind $S \in \mathcal{E}$, $f \in E'$ und $\mu := \max\{\mathrm{Re} f(x) \mid x \in S\}$, so gilt $S_f := \{x \in S \mid \mathrm{Re} f(x) = \mu\} \in \mathcal{E}$.

Bew: (a) Sind $y, z \in K$ und $0 < \lambda < 1$ mit $\lambda x + (1-\lambda) y \in S_0$, so folgt $\lambda x + (1-\lambda) y \in S \ \forall S \in \mathcal{F}$, also $x, y \in S \ \forall S \in \mathcal{F}$, da alle $S \in \mathcal{F}$ extremal. Dann folgt auch $x, y \in S_0$.

(b) Sind $y, z \in K$ und $0 < \lambda < 1$ mit $\lambda x + (1-\lambda) y \in S_f$, so folgt $\lambda \mathrm{Re} f(x) + (1-\lambda) \mathrm{Re} f(y) = \mathrm{Re} f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \mu$. Da $\mathrm{Re} f(x), \mathrm{Re} f(y) \leq 0$ folgt dann auch $\mathrm{Re} f(x) = \mathrm{Re} f(y) = \mu$.

Bew. von Satz 11.10: Sei $\mathcal{E}$ wie im Lemma und sei $S_0 \in \mathcal{E}$. Wir zeigen zunächst: $\exists x \in S_0$ mit $\{x\} \in \mathcal{E}$ (d.h. $x \in \mathrm{Ext}(K)$). Sei dazu

$$\mathcal{E}_0 := \{S \in \mathcal{E} \mid S \subseteq S_0\} \neq \emptyset$$

geordnet durch $S_1 \leq S_2 \iff S_2 \subseteq S_1$.

Ist $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{E}_0$ eine Kette bzgl. „$\leq$", so folgt $S_1 \cap \dots \cap S_e \neq \emptyset$ für alle $S_1, \dots, S_e \in \mathcal{K}$ (wähle kleinstes Element in $\{S_1, \dots, S_e\}$). Da K kompakt folgt mit der endl. Durchschnittseigenschaft, dass $M := \bigcap_{S \in \mathcal{K}} S \neq \emptyset$. Nach 11.11 (a) ist $M \in \mathcal{E}$, also ist M obere Schranke von $\mathcal{K}$. Das Zornsche Lemma liefert dann ein maximales (= minimal bzgl. „$\subseteq$") Element R in $\mathcal{E}_0$. Dann gilt $R = \{x\}$ für ein $x \in K$, denn wären $x, y \in R$ mit $x \neq y$, so ex. ein $f \in E'$ mit

$$\mathrm{Re} f(x) < \mathrm{Re} f(y)$$

und dann wäre $R_f \in \mathcal{E}$ mit $R_f \subsetneq R$. Wid. zu R minimal in $\mathcal{E}_0$ bzgl $\subseteq$.

Wir haben nun gesehen, dass jede extremale Teilm. $S_0 \subseteq K$ mindestens einen Extremalpkt $x \in S_0$ enthält. Insb. folgt $\mathrm{Ext}(K) \neq \emptyset$.

Setze nun $C := \mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(K)) \subseteq \mathrm{conv}(K)$.

Dann folgt für alle $S \in \mathcal{E}$: $\emptyset \neq \mathrm{Ext}(K) \cap S \subseteq C \cap S$.

Ann: $\exists\, x_0 \in \overline{C} \setminus K$. Dann ex. nach Hahn-Banach ein $f \in E'$, sodass für alle $x \in \overline{C}$ gilt:

$$\mathrm{Re} f(x) < \mathrm{Re} f(x_0) \leq \mu := \max\{\mathrm{Re} f(y) \mid y \in K\}.$$

Aber dann folgt $K_f \cap \overline{C} = \emptyset$, was ein Widerspr. zu $K_f \cap C \neq \emptyset$ da $K_f \in \mathcal{E}$ ist. Damit folgt

$$K \subseteq \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(K))}.$$

Ist K zusätzlich konvex, so folgt umgekehrt

$$\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(K))} \subseteq \overline{\mathrm{conv}(K)} = \overline{K} = K. \qquad \boxtimes$$

Als Anwendung erhalten wir nun:

11.12 Folgerung: Sei A ein C^*-Algebra. Dann gilt:

(1) Ist A unital, so gilt $S(A) = \overline{\mathrm{conv}(RS(A))}^{w^*}$.

(2) Ist $K = \{\varphi \in P(A) \mid \|\varphi\| \leq 1\}$, so gilt
$$K = \overline{\mathrm{conv}\{RS(A) \cup \{0\}\}}^{w^*} \quad (\text{bzgl schwach-}*\text{ Top})$$

(3) Für alle $a \in A$ gilt:
$$\|a\|^2 = \sup\{\varphi(a^*a) \mid \varphi \in RS(A)\}.$$

(4) Für alle $a \in A$ gilt
$$\|a\| = \sup\{\|\pi(a)\| \mid \pi \text{ irred. } *\text{-Darst. von } A\}$$

<u>Bew:</u> (1) Es gilt $S(A)$ ist abg. in der Einheitskugel von A', und damit schwach-$*$ kompakt nach Banach-Alaoglu, denn ist $(\varphi_i)_i$ Netz in $S(A)$

mit $\varphi_i \xrightarrow{w^*} \varphi \in A'$, so folgt für alle $a \in A$, dass $\varphi(a^*a) = \lim_i \varphi_i(a^*a) \geq 0$, also φ positiv, und

$$\|\varphi\| = \varphi(1) = \lim_i \varphi_i(1) = 1.$$

Da $\mathcal{Y}(A)$ auch konvex folgt (1) mit Satz 11.10.

(2) Analog zu (1) zeigt man, dass K schwach-$*$ abg. in $B_1^{A'}(0)$ ist. Ferner ist K konvex. Also folgt mit 11.10: $K = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ext}(K))} \overset{11.9}{=} \overline{\mathrm{conv}(RS(A) \cup \{0\})}$.

(3) Ist $a \in A$ so ex. nach 9.13 ein $\psi \in \mathcal{Y}(A)$ mit $\|a\|^2 = \psi(a^*a)$. Nach (2) ex. zu $\varepsilon > 0$ Elemente $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell \in RS(A)$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \geq 0$ mit $\sum_{i=1} \lambda_i \leq 1$, so dass

$$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \varphi_i(a^*a) \geq \psi(a^*a) - \varepsilon = \|a\|^2 - \varepsilon.$$

Aber dann ex. mindestens ein $i \in \{1, \dots, \ell\}$ mit $\varphi_i(a^*a) \geq \|a\|^2 - \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ bel., und da $\varphi(a^*a) \leq \|a^*a\| = \|a\|^2$ $\forall \varphi \in RS(A)$ folgt (3).

(4) folgt aus (3) mit $\|\pi_\varphi(a)\|^2 \geq \|\pi_\varphi(a)\xi_\varphi\|^2 = \varphi(a^*a)$ wenn π_φ die GNS-Darst. für $\varphi \in RS(A)$ ist, und π_φ irreduzibel, wenn $\varphi \in RS(A)$. $\boxed{}$

11.13 Wir fassen zusammen:

Ist A eine C^*-Algebra und setzen wir

$Z := \{(\pi, \xi) \mid \pi : A \to L(H)$ zykl. Darst., $\xi \in H$ zykl. Vektor mit $\|\xi\| = 1\}$

und

$\mathrm{Irr} := \{(\pi, \xi) \mid \pi$ irreduzible Darst. von A, $\xi \in H$ mit $\|\xi\| = 1\}$,

so erhalten wir Abbildungen

$Z \to \mathcal{Y}(A)$: $(\pi, \xi) \longmapsto \varphi_{\pi,\xi}$, $\varphi_{\pi,\xi}(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi\rangle$

$\mathrm{Irr} \to RS(A)$: $(\pi, \xi) \longmapsto \varphi_{\pi,\xi}$ (GNS-Konstr.).

Definieren wir eine Äquivalenz auf Z und Irr durch $(\pi,\xi)\sim(\varrho,\zeta) \iff \exists\, V: H_\pi \to H_\varrho$ unitär mit $V\xi=\zeta$ und $V\pi(a)=\varrho(a)V \;\forall a\in A$,
so erhalten wir Bijektionen $[(\pi,\xi)] \mapsto \varphi_{\pi,\xi}$
$Z/_\sim \leftrightarrow S(A)$ und $Irr/_\sim \leftrightarrow RS(A)$
mit Umkehrabb. $\varphi \mapsto [(\pi_\varphi,\xi_\varphi)]$ (Sätze 10.5 und 11.6)

11.14 Definition Sei A eine C^*-Algebra. Dann setzen wir
$\hat{A} := \{[\pi] \mid \pi: A\to L(H)$ irred. Darst. von $A\}$
wobei $[\pi]=[\varrho] \iff \pi\simeq\varrho \iff \exists$ $V: H_\pi \to H_\varrho$ unitär mit $V\pi(a)=\varrho(a)V\;\forall a\in A$

11.15 Bemerkung (1) Mit obiger Bem. erhalten wir eine surj. Abb. $RS(A)\to\hat{A}$, $\varphi\mapsto[\pi_\varphi]$, und damit ist $\hat{A}$ eine Menge.
Achtung: Die Klasse aller irred. Darst. von A ist im allg. keine Menge!
(2) Ist A kommutativ, so stimmt diese Def. von $\hat{A}$ mit der früheren überein. Insb. gilt dann $A=C_0(\hat{A})$ bzgl. geeigneter Top auf $\hat{A}$ (Übungsaufgabe).
(3) Eine wichtige Invariante für C^*-Algebren ist auch der Raum $Prim(A)$ der primitiven Ideale von A def. durch
$$Prim(A)=\{\ker\pi \mid [\pi]\in\hat{A}\}.$$
(5) Für jedes $[\pi]\in\hat{A}$ sei π ein Vertreter. Dann ist
$$\bigoplus_{[\pi]\in\hat{A}}\pi: A\to L\Big(\bigoplus_{[\pi]}H_\pi\Big)$$ eine treue nichtent. $*$-Darstellung von A, denn nach 11.12 (4) ex. $\forall\, 0\neq a\in A$ ein $[\pi]\in\hat{A}$ mit $\|\pi(a)\|\neq0$.
Es folgt auch $\bigcap\{J \mid J\in Prim(A)\}=\{0\}$.